

A propos des produits directs et semi-directs.

Soient N et H deux groupes, ψ un morphisme de H dans le groupe $\text{Aut}(N)$. Notons $G = N \rtimes H$ (en tant qu'ensemble et pas en tant que groupe).

Prop:

L'ensemble G peut être muni d'une structure de groupe de la manière suivante : le produit de (n, h) et (n', h') dans G est défini par $(n, h)(n', h') = (n \psi(h)(n'), hh')$.

Dém: facile.

Déf:

G muni de la structure de groupe précédente est appelé produit semi direct de N par H relativement à ψ . On le note $G = N \rtimes_{\psi} H$ ou parfois par abus $N \rtimes H$, quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Si $\psi(h) = \text{Id}_N \ \forall h \in H$, G est appelé produit direct de N par H et est noté $G = N \times H$. On dit alors que ψ est triviale.

Rq: • Si ψ est non triviale, $N \rtimes_{\psi} H$ n'est pas commutatif. En effet, soit $h \in H$ tq $\psi(h) \neq \text{Id}_N$. $\exists n \in N$ tq $\psi(h)(n) \neq n$.

$$(n, 1)(1, h) = (n \psi(1)(1), h) = (n, h).$$

$$(1, h)(n, 1) = (1, \underbrace{\psi(h)(n)}_{\neq n}, h) \neq (n, h).$$

• Il n'y a aucune condition sur les groupes N et H . On peut donc définir le p.s.d. de n'importe quels groupes.

• Une action de H sur N induit un morphisme $\psi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ et réciproquement.

Se donner un morphisme $\psi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ c'est donc se donner une action de H sur N .

Rq: . Comme ensemble, $N \rtimes_\psi H = N \times H$

. Comme espace topologique, $N \rtimes_\psi H$ est $N \times H$ muni de la topologie produit.

. Comme groupe : voir définition précédente.

Soient $\bar{N} = \{(n, 1) \in G, n \in N\}$ et $\bar{H} = \{(1, h) \in G, h \in H\}$.

Clairement, $\bar{N} \cong N$ et $\bar{H} \cong H$. De plus, $\bar{N} \cap \bar{H} = 1_G$.

Prop.

$\bar{N}$ est distingué dans G .

Dém. [FG] p. 239

Rq: on a la suite exacte $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} N \rtimes H \xrightarrow{s} H \rightarrow 1$
où $i: n \mapsto (n, 1)$ et $s: (n, h) \mapsto h$.

Décomposition d'un groupe.

L'écriture d'un groupe G sous forme de produit direct ou semi direct permet de ramener l'étude de G à celle de deux groupes strictement plus petits.

Ici, on va donc chercher à écrire G sous la forme $N \rtimes H$ où $N \leq G$, $H \leq G$.

D'après la prop précédente, si on veut avoir une chance d'écrire G sous la forme $N \rtimes_\psi H$, il faut que $\bar{N} \cong N$ soit distingué dans G .

Soit G un groupe non trivial. Si G est simple, alors G ne peut pas s'écrire comme un produit semi direct (ou direct).
Supposons donc G non simple.

On va donner une CVS pour avoir $G = N \rtimes H$, mais avant cela il faut définir quelques notions.

Réa: [FG] p. 239-240

Déf. [Wikipedia + FG-240]

• Soit une suite exacte $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/N \rightarrow 1$

On dit que la suite exacte est scindée s'il existe $\exists s: G/N \rightarrow G$ ^{un morphisme} tq $\pi \circ s = \text{id}$. On dit alors que s est une section.

• Soit $H \leq G$. On dit que H est un relèvement de G/N si la restrict° $\pi|_H: H \rightarrow G/N$ est un isomorphisme.

Rq: il est équivalent de dire que:

(1) • une suite exacte est scindée

(2) • ——— admet une sect°

(3) • ——— un relèvement.

En effet, (1) $\Leftrightarrow$ (2) par définition.

(3) $\Rightarrow$ (2). H un relèvement de G/N , $\pi|_H: H \rightarrow G/N$ est un isomph. On pose $s = (\pi|_H)^{-1}$. Alors $s: G/N \rightarrow H$ et $\pi \circ s = \text{id}_{G/N}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). soit s tq $\pi \circ s = \text{id}_{G/N}$. Posons $H = s(G/N)$. s admet un inverse à gauche donc est injective.

Donc $s: G/N \rightarrow H$ est un isomph de réciproque $\pi|_H$. $\pi|_H$ est un isomph.

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/N \rightarrow 1$$

$\nwarrow$
 s

Prop. [Wikipedia + FG-240] (caractérisation du psd)

Soit G un groupe non trivial et non simple. $N \trianglelefteq G$. $H \leq G$.

(1) $G = N \rtimes H$ ou $\psi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ (ψ est entièrement déterminé)
 $h \mapsto \psi_h: n \mapsto hnh^{-1}$

(2) $N \cap H = \{\text{id}\}$ et $G = NH$

(3) $\forall x \in G, \exists! (x_1, x_2) \in N \times H$ tq $x = x_1 x_2$

(4) La suite exacte $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1$ est scindée

(4') G/N admet H pour relèvement

Dém: ? une partie de FG

Rq: si $H \trianglelefteq G$, alors $G \cong N \times H$.

Il faut bien comprendre que lorsqu'on utilise une de ces caractérisations (2), (3), (4) ou (4') pour montrer que $G = N \rtimes H$, le " Ψ " associé au psd... est entièrement déterminé, c'est celui correspondant à l'action de H sur N par conjugaison, (e) $\Psi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$

$$h \mapsto (n \mapsto hnh^{-1})$$

→ Un groupe se décompose-t-il forcément sous forme de produit direct / semi direct de groupes simples?

NON. Alt_8 par exemple n'est pas simple, mais n'admet pas de décomposition autre que $\text{Alt}_8 \times \{1\}$.

Dém: [FG] exo 1.3 quest 3.

→ Si un groupe se décompose en psd, y'a-t-il unicité dans la décomposition?

NON. Par exemple, $\text{D}_6 \simeq \mathbb{Z}_{16}\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_{12}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_{13}\mathbb{Z} \rtimes V_4$ où V_4 est le groupe de Klein.

Dém: cf [FG] exo 1.14 quest 2 (p. 21).

→ Si on a $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$, $\psi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$, avec $\varphi \neq \psi$, peut-on avoir $N \rtimes_{\varphi} H \simeq N \rtimes_{\psi} H$?

OUI. On peut mg s'il existe $\alpha \in \text{Aut}(H)$ tq $\psi = \varphi \circ \alpha$, alors $N \rtimes_{\varphi} H \simeq N \rtimes_{\psi} H$. [Par ex, il y a 3 mps $\mathbb{Z}_{13}\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(V_4)$ qui donnent 2 psd isomorphes entre eux et un pld direct]

Dém: cf [FG] exo 1.13 quest 1 (p. 18).

pour l'exemple, cf [FG] exo 1.14 quest 1 (p. 20).

Rq: la condit° donnée n'est qu'une condit° suffisante.

→ Mais alors, peut-on trouver des groupes N, H et des morphismes φ, ψ tq $N \rtimes_{\varphi} H \not\cong N \rtimes_{\psi} H$?

Oui. Par exemple, il existe deux psd $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi_1} D_4$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi_2} D_4$ non isomorphes.

Dém : voir [Ortiz] exo I.32 p. 61.

On arrive maintenant au point qui me posait le plus de problème: la méthode pour classifier des groupes d'ordre donné. Le plus facile sera de traiter un exemple: la classification des groupes d'ordre 12. On y va.

Soit G un groupe d'ordre 12. Il faut noter qu'on ne sait rien de la loi de G . On sait juste que G est un ensemble à 12 éléments, et le but est de trouver combien de structures de groupes on peut lui mettre dessus.

Les théorèmes de Sylow montrent que $n_2 \in \{1, 3\}$, et $n_3 \in \{1, 4\}$. 4 cas se présentent.

→ $n_2=2$ et $n_3=4$: pas possible pour des raisons de cardinal

→ $n_2=n_3=1$: N le 2-Sylow, H le 3-Sylow. N et H sont distins, donc $G \cong N \times H$. $|H|=3$ donc $H \cong \mathbb{Z}_3$.

$|N|=4$ donc $N \cong \mathbb{Z}_4$ ou $N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Donc $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ ou $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

Par th chinois, $G \cong \mathbb{Z}_{12}$ ou $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

→ $n_3=4$ et $n_2=1$. C'est là que va intervenir le psd.

N le 2-Sylow, H le 3-Sylow. $N \leq G$, $H \leq G$.

Les elts de N sont d'ordre 1, 2 ou 4, ceux de H sont d'ordre 1 ou 3.

Donc $N \cap H = \{1\}$. De plus, $|N| |H| = 12 = |G|$ donc $G = NH$.

Par la propriété, $G \cong N \rtimes_{\Psi} H$, où $\Psi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$
 $h \mapsto (\Psi_h: n \mapsto h \cdot n \cdot h^{-1})$.

⚠ Là était mon problème. J'avais donc l'impression que Ψ était entièrement déterminée, et qu'on avait donc fini l'étude de ce cas $n_2=1, n_3=4$. Mais en fait non! Car on voit bien que Ψ dépend de la loi $\cdot$ de G , qui n'est pas définie, ainsi que je l'ai précisé au début de l'étude. Ψ n'est donc pas déterminé. J'en rajoute:

- Si $(G, \cdot)$ est un groupe à la loi bien défini, et qu'on vérifie la caractérisation du psd, on trouve $G \cong N \rtimes_{\Psi} H$ où Ψ est déterminé.
- Si G est un groupe dont la loi n'est pas définie, et qu'on vérifie la caractérisation du psd, $G \cong N \rtimes_{\Psi} H$ où Ψ n'est pas déterminé car dépend de la loi de G elle-même non déterminée. Dans ce cas, donner une loi à G , c'est déterminer Ψ , et déterminer Ψ , c'est donner une loi à G .
 Nous, on veut trouver toutes les lois possibles dont on peut munir G , ce qui revient à trouver tous les $\Psi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$.
 $|N|=4$ donc $N \cong \mathbb{Z}_4$ ou $N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

* Si $N \cong \mathbb{Z}_4$. On a $H \cong \mathbb{Z}_3$.

On cherche donc les morph $\mathbb{Z}_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2$

Soit Ψ un tel morphisme. $\Psi(1+1+1) = \Psi(0) = 0 = 3\Psi(1)$ donc $\Psi(1)=0$. D'où $\Psi(2)=\Psi(3)=0$. Ψ est le morphisme trivial.

Ce Ψ détermine une loi sur G , et on a $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$.
 (on l'avait déjà trouvé dans le cas précédent).

* Si $N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. $H \cong \mathbb{Z}_3$. On cherche le morph $\mathbb{Z}_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong GL_2(\mathbb{F}_2)$ (cf [Art. 2 p 50])

$$GL_2(\mathbb{F}_2) = \left\{ M_1 = \text{Id}; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \right. \\ \left. M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\psi(1+1+1) = \psi(0) = \text{Id} = \psi(1)^3 \text{ donc } o(\psi(1)) \mid 3.$$

$$o(M_1) = 1 ; o(M_2) = o(M_3) = o(M_4) = 2 ; o(M_5) = o(M_6) = 3.$$

* si $\psi_1(1) = M_1$, ψ est le mph trivial, $G \simeq \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$.
(déjà trouvé).

+ si $\psi_2(1) = M_5$, ψ_2 est un mph non trivial, $G \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_{\psi_2} \mathbb{Z}_3$.

(le premier groupe non abélien qu'on trouve).

* si $\psi_3(1) = M_6$, ψ_3 donne $G \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_{\psi_3} \mathbb{Z}_3$.

Mais ce groupe est-il isomorphe à un des précédents ?

Oui, car $M_6 = M_5^2$ et donc $\psi_3 = \psi_2 \circ \alpha$ où $\alpha: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$.
 $x \mapsto 2x$

Ce cas $n_2 = 1$, $n_3 = 4$ donne donc seulement un nouveau groupe G qui est $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3 = V_4 \rtimes \mathbb{Z}_3$.

On ne marque pas le " ψ " car il n'y a qu'un seul psd $V_4 \rtimes \mathbb{Z}_3$ à isomph près, comme on vient de le remarquer.

$\rightarrow \underline{n_3 = 1, n_2 = 2}$: on fait pareil. N le 3-Sylow, H le 2-Sylow.

Si $H \simeq \mathbb{Z}_4$, on trouve $G \simeq \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$ ou $G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_{12}$.
(un seul mph non trivial).

Si $H \simeq V_4$, il y a 3 mph non triviaux qui donnent 3 psd isomorphes (trouver le bon α), et un mph trivial.

Donc $G \simeq \mathbb{Z}_3 \rtimes V_4$ ou $G \simeq \mathbb{Z}_3 \times V_4 = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$.

Bilan: à isomph près, il existe 5 groupes d'ordre 12, qui sont $\mathbb{Z}_{12}$; $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$; $\mathbb{Z}_3 \rtimes V_4$; $V_4 \rtimes \mathbb{Z}_3$; $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$.

(preuve inspirée de FG exo 1.14).

[FG]: Francin ou Ginetta - Ex de maths pour l'agrég - Algèbre 1

[Orli2]: Orli 2 - Exos d'Algèbre